Αναλυτική Γεωμετρία 1/3/2016

Μάθημα 5ο

Πρόταση

Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in V$ μη-μηδενικά. Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$: Γραμ. εξαρτ. $\Longleftrightarrow$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο

Απόδειξη

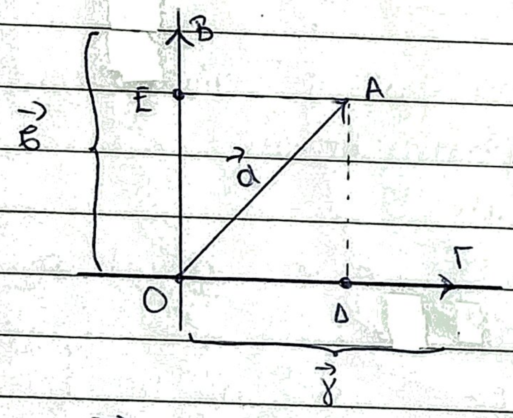
$(\Rightarrow)$ Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ Γ.Ε $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$

$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{\gamma} = \vec{0}$ χβγ έστω $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{b} + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\vec{\gamma} \Rightarrow$ το $\vec{a}$ ανήκει στο επίπεδο

των $\vec{b}, \vec{\gamma} \Rightarrow$ τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ συνεπίπεδα

$(\Leftarrow)$ Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ συνεπίπεδα



$\vec{OA} = \vec{a} = \vec{OΔ} + \vec{ΔA} = \vec{OΔ} + \vec{OE}$

Αλλά $\vec{OΔ} = \lambda \vec{OΓ}$, $\lambda \neq 0$

$\vec{OE} = \mu \vec{OB}$, $\mu \neq 0$

$\vec{a} = \lambda \vec{OΓ} + \mu \vec{OB} = \lambda \vec{\gamma} + \mu \cdot \vec{b} \Rightarrow 1 \cdot (\vec{a}) + (-\lambda) \cdot \vec{\gamma} + (-\mu)\vec{b} = \vec{0}$ (*)

δηλαδή $\exists (1, -\lambda, -\mu) \neq (0,0,0)$ να ισχύει η (*) $\Rightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ Γ.Ε

Σχόλιο:

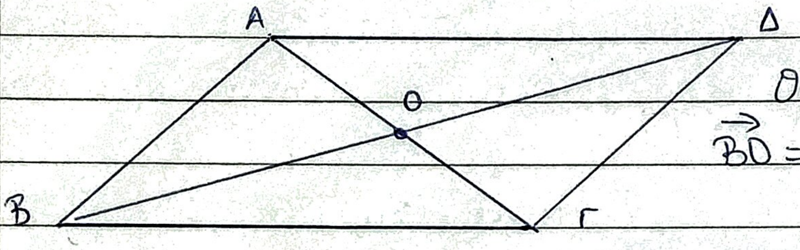
Τρία διανύσματα που δεν είναι στο ίδιο επίπεδο είναι Γραμμικά Ανεξάρτητα

Από αξίωμα Hilbert, υπάρχουν (τουλάχιστον) τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα $\Rightarrow \dim V \geq 3$

! Στον χωρο αποδεικνυεται οτι οποιαδηποτε 4 διανυσματα, ειναι γραμμικα εξαρτημενα $\Rightarrow \dim V = 3$

Εφαρμογη 1

Να δειχθει οτι οι διαγωνιοι ενος παραλληλογραμμου διχοτομουνται



Θελουμε νδο $\vec{BO} = \frac{1}{2}\vec{B\Delta}$ και $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

Μεθοδολογια:

Εκφραζουμε τα διανυσματα που μας ενδιαφερουν, ως συναρτηση γραμμικα ανεξαρτητων διανυσματων

Παρατηρουμε οτι τα $\vec{BA}$ και $\vec{B\Gamma}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα {δεν εχουν ιδια διευθυνση αρα απο προηγουμενη προταση 2 Γ.Ε $\Leftrightarrow$ ιδια διευθυνση}

Αρα:

$$\vec{BO} = \vec{BA} + \vec{AO} \xrightarrow[\exists \lambda \in \mathbb{R}:\ \vec{AO} = \lambda \cdot \vec{A\Gamma}]{\text{Αλλα } \vec{AO},\ \vec{A\Gamma} \text{ ιδια διευθυνση}} \vec{BA} + \lambda \cdot \vec{A\Gamma} \xrightarrow[\vec{AB} = -\vec{BA}]{\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}}$$

$$\vec{BA} + \lambda(\vec{AB} + \vec{B\Gamma}) \Rightarrow \boxed{\vec{BO} = (1-\lambda)\vec{BA} + \lambda \cdot \vec{B\Gamma}} \quad (1)$$

Ομοιως $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{A\Delta} \overset{\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}}{=\!=} \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ (2)

Αλλα $\vec{BO}, \vec{B\Delta}$ ιδια διευθυνση $\Rightarrow \vec{BO} = \mu \cdot \vec{B\Delta}$ (*) θελουμε νδο $\mu = \frac{1}{2}$

η (*) λόγω (1), (2) γίνεται

$(1-\lambda)\vec{BA}+\lambda\cdot\vec{B\Gamma}=\mu(\vec{BA}+\vec{B\Gamma}) \Rightarrow (1-\lambda-\mu)\vec{BA}+(\lambda-\mu)\vec{B\Gamma}=\vec{0}$

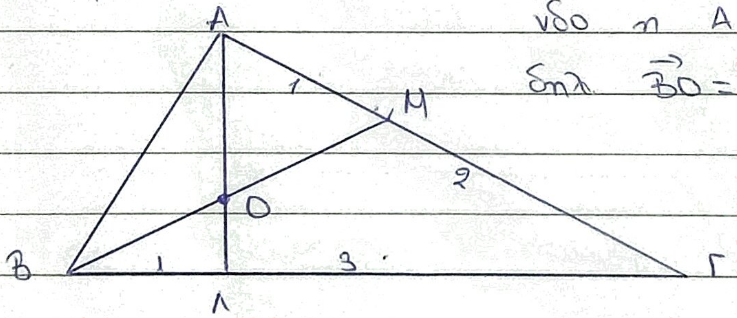
αλλά $\vec{BA}, \vec{B\Gamma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα από τον ορισμό θα έχουμε ότι: $\begin{cases} 1-\lambda-\mu=0 \\ \lambda-\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda-\mu=0 \\ \lambda=\mu \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda=\mu \\ 1-2\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\mu \\ \mu=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=1/2 \\ \mu=1/2 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\mu=\frac{1}{2}$$

Όμοια δουλεύω και για το $\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

Εφαρμογή 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Λ σημείο της ΒΓ: $\vec{B\Lambda}=\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$ και έστω ένα Μ σημείο της ΑΓ: $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$



νδο η ΑΛ διχοτομεί την ΒΜ

δηλ. $\vec{BO}=\frac{1}{2}\vec{BM}$

$\vec{BO}, \vec{BM}$ έχουν ίδια διεύθυνση $\Rightarrow \boxed{\vec{BO}=\lambda\cdot\vec{BM}}$ (1) θα δείξουμε ότι $\lambda=\frac{1}{2}$

Τα $\vec{BA}, \vec{B\Gamma}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα (δεν έχουν ίδια διεύθυνση)

$\vec{BO}=\vec{BA}+\vec{AO} \xRightarrow{\vec{AO}=\mu\cdot\vec{A\Lambda}} \vec{BA}+\mu\cdot\vec{A\Lambda} \xRightarrow{\vec{A\Lambda}=\vec{AB}+\vec{B\Lambda}} \vec{BA}+\mu(\vec{AB}+\vec{B\Lambda})$

$\xRightarrow[\vec{AB}=-\vec{BA}]{} \vec{BO}=(1-\mu)\vec{BA}+\mu\vec{B\Lambda} \xRightarrow[\vec{B\Lambda}=\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}]{}$

$\boxed{\vec{BO}=(1-\mu)\vec{BA}+\frac{\mu}{4}\vec{B\Gamma}}$ (2)

Επίσης $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} \xrightarrow{\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{A\Gamma}} \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{A\Gamma} \xrightarrow{\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}}$

$\vec{BM} = \vec{BA} + \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{B\Gamma}) \xrightarrow{\vec{AB} = -\vec{BA}} \boxed{\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}}$ (3)

Αρα απο τις (2), (3) η (1) γίνεται

$$(1-\mu)\vec{BA} + \frac{\mu}{4}\vec{B\Gamma} = \lambda\left(\frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1-\mu-\frac{2\lambda}{3}\right)\vec{BA} + \left(\frac{\mu}{4} - \frac{\lambda}{3}\right)\vec{B\Gamma} = \vec{0} \xrightarrow[\text{αρα απο ορισμο}]{\vec{BA},\ \vec{B\Gamma}\ \Gamma.A}$$

$$\begin{cases} 1-\mu-\frac{2\lambda}{3} = 0 \\ \frac{\mu}{4} - \frac{\lambda}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{3}{4}\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Αρα $\lambda = \frac{1}{2}$

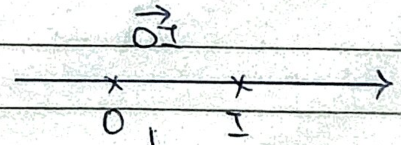
Άξονας

δίνουμε φορά

(ε) ευθεια

$+ \rightarrow \quad \leftarrow -$

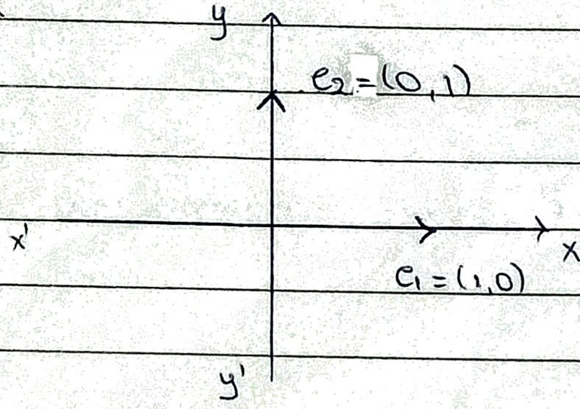
έχουμε άξονα $\xrightarrow[\text{αρχικό σημείο}]{\text{τοποθετούμε}}$

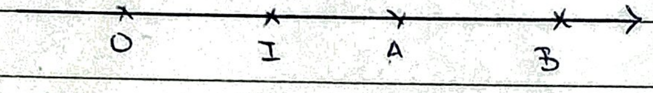


$\vec{OI}$ το μοναδιαίο διάνυσμα

όπου $|\vec{OI}| = 1$

πχ

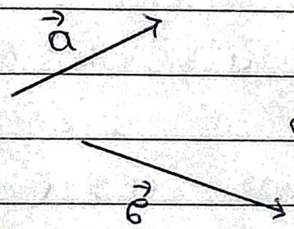




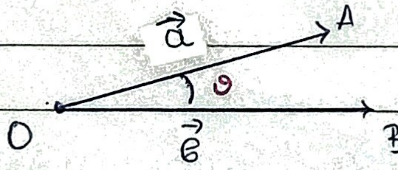
$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Γωνια δυο διανυσματων

Εστω $\vec{a}$, $\vec{b}$ δυο διανυσματα



Μεταφερουμε παραλληλα εως να συμπεσουν οι αρχες των $\vec{a}$, $\vec{b}$



Οριζουμε γωνια των $\vec{a}$, $\vec{b}$ συμβολισμος $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ την μικροτερη (μη αρνητικη) γωνια που σχηματιζεται αν κινησω την $\vec{OB}$ να ταυτιστει με την $\vec{OA}$

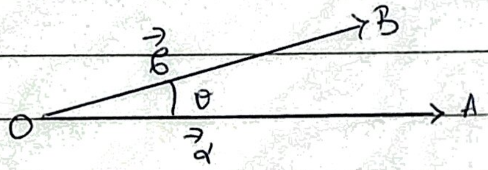
Παρατηρησεις:

(1) $(\vec{b} \,\hat{,}\, \vec{\alpha}) = (\vec{\alpha} \,\hat{,}\, \vec{b})$

(2) $(\vec{\alpha} \,\hat{,}\, \vec{b}) = 0$, αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ εχουν ιδια φορα

(3) $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \pi$, αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ έχουν αντιθετη φορά

(4) $0 \leq (\vec{\alpha} \,\hat{,}\, \vec{b}) \leq \pi$



Ορισμος

Μετρο ενος διανυσματος $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ οριζεται ως $|\vec{a}|$ ή $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_k^2}$

Ορισμος (1ος)

Η απεικονιση $\langle \cdot \rangle : V \times V \xrightarrow{} \mathbb{R}$ (V: Συνολο διανυσματων)

$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

οριζεται ως εσωτερικο γινομενο των $\vec{a}, \vec{b}$

συμβολισμος $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{ορ.}}{=} |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Ορισμος (2ος)

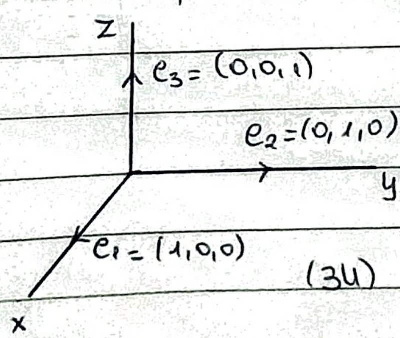
Αν $Oxyz$ ορθοκανονικο συστημα συντεταγμενων

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Αποδεικνυεται οτι 1ος $\Longleftrightarrow$ 2ος

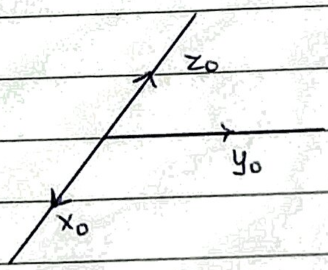
Παρατηρηση

Εστω οτι δεν εχουμε ορθοκανονικο συστημα.



Εστω $\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ τυχαιο (συστημα αναφορας) με

$|\vec{x_0}| = |\vec{y_0}| = |\vec{z_0}| = 1$



$$\left.\begin{aligned} &\text{Τοτε αν } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{x_0} + a_2 \vec{y_0} + a_3 \vec{z_0} \\ &\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{x_0} + b_2 \vec{y_0} + b_3 \vec{z_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 \vec{x_0}\vec{x_0} + a_2 b_2 \vec{x_0}\vec{y_0} + \dots \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \overbrace{\vec{x_0}\vec{y_0}}^{\cos(x_0, y_0)} + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \underbrace{\vec{x_0}\vec{z_0}}_{\cos(x_0, z_0)} +$$

$$+ (a_2 b_3 + a_3 b_2) \underbrace{\vec{y_0}\vec{z_0}}_{\cos(y_0, z_0)}$$

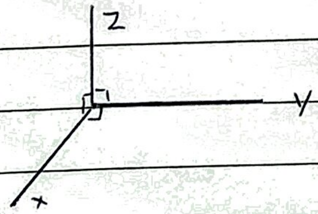
Γιατι:

$\vec{x_0} \cdot \vec{x_0} = |\vec{x_0}||\vec{x_0}| \cdot \cos(x_0, x_0) = 1 . 1 . 0 = 0$ και

$\vec{x_0} \cdot \vec{y_0} = |\vec{x_0}||\vec{y_0}| \cdot \cos(x_0, y_0) = \cos(x_0, y_0)$

Αν το συστημα ειναι ορθογωνιο δηλαδη $x_0 \perp y_0$, $y_0 \perp x_0$

π.χ $\mathbb{R}^3$



τοτε $\cos(\dots) = 0 \Rightarrow$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$